5 класс

1. Как провести на плоскости пять прямых, чтобы получилось пять точек пересечения (точка пересечения - точка, через которую проходит не менее двух прямых)?

2. В пяти пакетах лежат конфеты. В первом 7, во втором 8, в третьем 9, в четвёртом 11 и в пятом 15. Из любого пакета в любой другой можно переложить любое возможное число конфет. Можно ли за два перекладывания добиться равного числа конфет во всех пакетах? А за три?

3. Вася утверждает, что у него есть два восьмиугольника, из которых он может сложить как прямоугольник 4×6, так и прямоугольник 3×8. Прав ли он?

4. В записи трёх двухзначных чисел нет нулей, и в каждом из них обе цифры различны. Их сумма равна 40. Какой может быть их сумма, если в них цифры поменять местами?

5. Петя смог закрасить несколько клеток квадрата 4×4 так, что нашлось двадцать вершин, каждая из которых принадлежит только одному закрашенному квадрату? Приведите пример. Могло ли получиться больше таких вершин?

Все задачи 5 класса составил Женодаров Р.Г. 5

6 класс

1. Как провести на плоскости шесть прямых, чтобы получилось шесть точек пересечения (точка пересечения - точка, через которую проходит не менее двух прямых)?

2. В пяти пакетах лежат конфеты. В первом 7, во втором 8, в третьем 9, в четвёртом 11 и в пятом 15. Из любого пакета в любой другой можно переложить любое возможное число конфет. Можно ли за два перекладывания добиться равного числа конфет во всех пакетах? А за три?

3. Вася утверждает, что у него есть два пятиугольника и треугольник, из которых он может сложить как прямоугольник 4×6, так и прямоугольник 3×8. Прав ли он?

4. В записи трёх двухзначных чисел нет нулей, и в каждом из них обе цифры различны. Их сумма равна 41. Какой может быть их сумма, если в них цифры поменять местами?

5. Петя хочет закрасить несколько клеток квадрата 4×4 так, чтобы нашлось как можно больше вершин, каждая из которых принадлежит только одному закрашенному квадрату? Какого числа закрашенных вершин он может добиться?

Все задачи 6 класса составил Женодаров Р.Г.

7 класс

1. В пяти пакетах лежат конфеты. В первом 7, во втором 8, в третьем 9, в четвёртом 11 и в пятом 20. Из любого пакета в любой другой можно переложить любое возможное число конфет. Можно ли за два перекладывания добиться равного числа конфет во всех пакетах? А за три?

2. Можно ли вместо звёздочек поставить четыре последовательных натуральных числа, чтобы равенство $*\times*-*\times*=11$ стало верным?

3. Указать семь различных натуральных чисел, каждое из которых делит сумму остальных.

4. Вася утверждает, что у него есть два треугольника и пятиугольник, из которых он может сложить как прямоугольник 4×6, так и прямоугольник 3×8. Прав ли он?

5. Петя хочет закрасить несколько клеток квадрата 6×6 так, чтобы нашлось как можно больше вершин, каждая из которых принадлежит ровно трём закрашенным квадратам. Какого наибольшего числа таких вершин он может добиться?

Все задачи 7 класса составил Женодаров Р.Г.

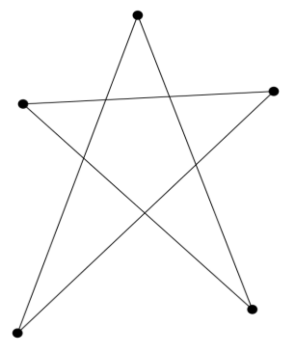
8 класс

1. В пяти пакетах лежат конфеты. В первом 2, во втором 12, в третьем 12, в четвёртом 12 и в пятом 12. Из любого пакета в любой другой можно переложить любое возможное число конфет. За какое наименьшее число перекладываний можно добиться равного числа конфет во всех пакетах?

2. Можно ли вместо звёздочек поставить шесть последовательных натуральных чисел, чтобы равенство $*\times*\times*-*\times*\times*=2015$ стало верным?

3. Имеется семь красных кубиков, три синих и девять зелёных. В мешок для подарка уложили десять кубиков. Сколькими различными способами это могли сделать?

4. Имеется пятиконечная звезда. У неё есть три равных угла при вершинах, и два оставшихся тоже равны между собой. Верно ли, что из пяти треугольников при вершинах звезды хотя бы один равнобедренный?



5. Петя хочет закрасить несколько клеток квадрата 8×8 так, чтобы для любой вершины нашелся закрашенный квадрат, которому она принадлежит. Какое наименьшее число квадратов он должен закрасить?

Все задачи 8 класса составил Женодаров Р.Г.

Общие рекомендации по проверке

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

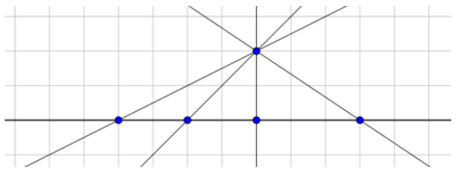
Решения и критерии

5 класс

1. Как провести на плоскости пять прямых, чтобы получилось пять точек пересечения (точка пересечения - точка, через которую проходит не менее двух прямых)?

Решение.

На рисунке справа показан один из возможных примеров.



При проверке важно учитывать, что точка пересечения может быть не нарисована и важно понять, какие прямые - параллельные или нет - имеет в виду решающий.

Критерии. Пример: 7 баллов. Отсутствие примера: 0 баллов

2. В пяти пакетах лежат конфеты. В первом 7, во втором 8, в третьем 9, в четвёртом 11 и в пятом 15. Из любого пакета в любой другой можно переложить любое возможное число конфет. Можно ли за два перекладывания добиться равного числа конфет во всех пакетах? А за три?

Решение.

Всего конфет 50, а пакетов 5, значит, в каждом пакете после перекладываний должно оказаться по 10 конфет. В трёх первых пакетах конфет меньше 10, и значит в них надо добавлять конфеты, а это как минимум три перекладывания. Значит, за два перекладывания сравнять число конфет в пакетах нельзя.

За три можно. Из 5 в первый - три конфеты. Из пятого во второй - две конфеты. Из четвёртого в третий - одна конфета.

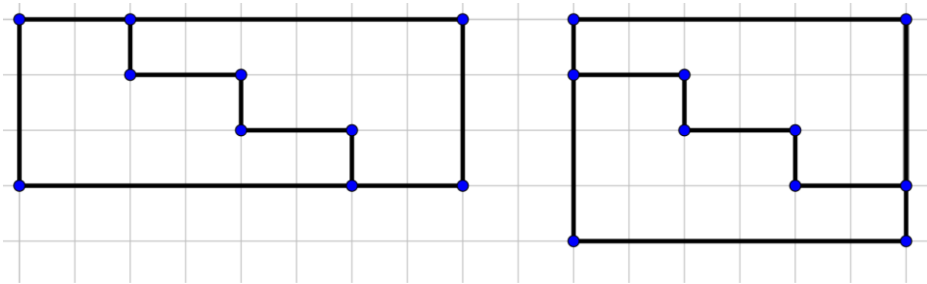
Есть другие примеры перекладываний.

Критерии. За объяснение, что за два перекладывания нельзя: 3 балла. Пример перекладываний: 4 балла.

3. Вася утверждает, что у него есть два восьмиугольника, из которых он может сложить как прямоугольник 4×6, так и прямоугольник 3×8. Прав ли он?

Ответ: Вася прав.

Решение. Пример показан на рисунке.



4. В записи трёх двухзначных чисел нет нулей, и в каждом из них обе цифры различны. Их сумма равна 40. Какой может быть их сумма, если в них цифры поменять местами?

Ответ: 103.

Решение. Во всех числах цифра десятков равна 1. Иначе большее число не менее 21, а два других не меньше 12. Их сумма не меньше 12+12+21=44, что не равно 40. Сумма цифр единиц равна 10 (нули запрещены). И значит сумма чисел с переставленными цифрами равна 103.

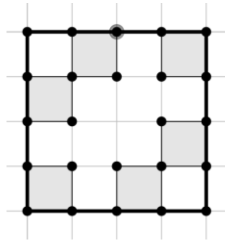
Есть только три возможных варианта чисел: 12, 12, 16 или 12, 13, 15, и 13, 13, 14. (На этом можно обосновать ответ)

Критерии. Ответ с одним или двумя примерами: 1 балл.

Ответ с тремя примерами, но без доказательства, что других нет: 2 балла.

Полное решение: 7 баллов.

5. Петя смог закрасить несколько клеток квадрата 4×4 так, что нашлось двадцать вершин, каждая из которых принадлежит только одному закрашенному квадрату. Приведите пример. Могло ли получиться больше таких вершин?



Ответ: Пример на 20 вершин показан на рисунке.

Больше 20 вершин получиться не могло.

В строке из 5 вершин не более 4 вершин может принадлежать одному закрашенному квадрату (Сторона квадрата содержит две вершины). В пяти строках не более 5×4= 20 вершин.

Критерии. Пример: 4 балла. Обоснование невозможности более 20: 3 балла.

Общие рекомендации по проверке

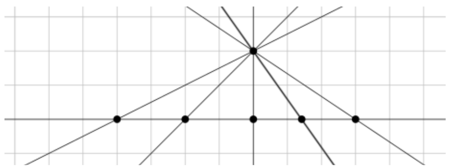
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

6 класс

1. Как провести на плоскости шесть прямых, чтобы получилось шесть точек пересечения (точка пересечения - точка, через которую проходит не менее двух прямых)?

Решение.

На рисунке справа показан один из возможных примеров.

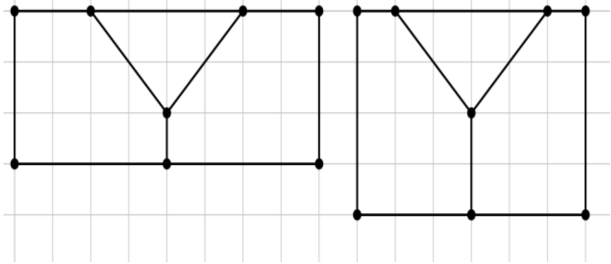


При проверке важно учитывать, что точка пересечения может быть не нарисована, и важно понять, какие прямые - параллельные или нет - имеет в виду решающий.

Критерии. Пример: 7 баллов. Отсутствие примера: 0 баллов

2. В пяти пакетах лежат конфеты. В первом 7, во втором 8, в третьем 9, в четвёртом 11 и в пятом 15. Из любого пакета в любой другой можно переложить любое возможное число конфет. Можно ли за два перекладывания добиться равного числа конфет во всех пакетах? А за три?

Решение. Всего конфет 50, а пакетов 5, значит, в каждом пакете после перекладываний должно оказаться по 10 конфет. В трёх первых пакетах конфет меньше 10, и значит в них надо добавлять конфеты, а это как минимум три перекладывания. Значит, за два перекладывания сравнять число конфет в пакетах нельзя.
За три можно. Из 5 в первый - три конфеты. Из пятого во второй - две конфеты. Из четвёртого в третий - одна конфета.



Есть другие примеры перекладываний.

Критерии. За объяснение, что за два перекладывания нельзя: 3 балла.
Пример перекладываний: 4 балла.

3. Вася утверждает, что у него есть два пятиугольника и треугольник, из которых он может сложить как прямоугольник 4×6, так и прямоугольник 3×8. Прав ли он?
Ответ: Вася прав. Решение. Пример показан на рисунке.

Имеется много похожих примеров.

4. В записи трёх двухзначных чисел нет нулей, и в каждом из них обе цифры различны. Их сумма равна 41. Какой может быть их сумма, если в них цифры поменять местами?

Ответ: 113.

Решение. Во всех числах цифра десятков равна 1. Иначе большее не менее 21, а два других не меньше 12. Их сумма не меньше 12+12+21=44, что не равно 41. Сумма цифр единиц равна 11 (нули запрещены). И значит сумма с переставленными цифрами равна 113.

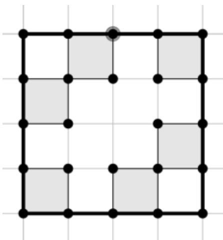
Есть пять возможных вариантов трех чисел: 12, 12, 17 или 12, 13, 16, или 12, 14, 15 или 13,13, 15 или 13, 14, 15. (На этом можно обосновать ответ)

Критерии. Ответ с одним или двумя , тремя или четырьмя примерами: 1 балл.

Ответ с пятью примерами, но без доказательства, что других нет: 2 балла.

Полное решение: 7 баллов.

5. Петя хочет закрасить несколько клеток квадрата 4×4 так, чтобы нашлось как можно больше вершин, каждая из которых принадлежит только одному закрашенному квадрату? Какого наибольшего числа закрашенных вершин он может добиться?



Ответ: 20.

Пример показан на рисунке.

Оценка. В строке из 5 вершин не более 4 вершин может принадлежать одному закрашенному квадрату (сторона квадрата содержит две вершины). В пяти строках не более 5×4= 20 вершин.

Критерии. Пример : 4 балла. Оценка: 3 балла.

Общие рекомендации по проверке

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

7 класс

1. В пяти пакетах лежат конфеты. В первом 7, во втором 8, в третьем 9, в четвёртом 11 и в пятом 20. Из любого пакета в любой другой можно переложить любое возможное число конфет. Можно ли за два перекладывания добиться равного числа конфет во всех пакетах? А за три?

Решение.

Всего конфет 55, а пакетов 5, значит, в каждом пакете после перекладываний должно оказаться по 11 конфет. В трёх первых пакетах конфет меньше 11, и значит в них надо добавлять конфеты, а это как минимум три перекладывания. Значит, за два перекладывания сравнять число конфет в пакетах нельзя.

За три можно Из пятого в первый - четыре конфеты. Из пятого во второй - три конфеты. Из пятого в третий - две конфеты.

Есть другие примеры перекладываний.

Критерии. За объяснение, что за два перекладывания нельзя: 3 балла. Пример перекладываний: 4 балла.

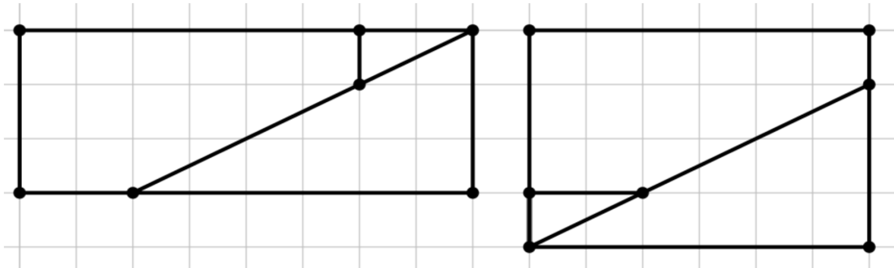
2. Можно ли вместо звёздочек поставить четыре последовательных натуральных числа, чтобы равенство $*\times*-*\times*=11$ стало верным?

Ответ: Можно.

Пример: $5\times7-4\times6=11$

3. Указать семь различных натуральных чисел, каждое из которых делит сумму остальных.

Примеры: Первый 1, 2, 4, 7, 14, 28, 56.



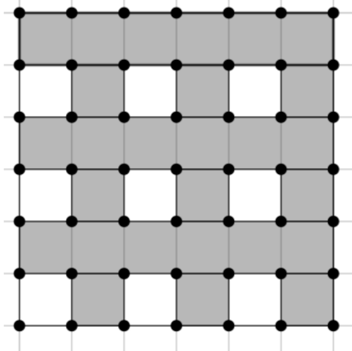
Второй. 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48.

4. Вася утверждает, что у него есть два треугольника и пятиугольник, из которых он может сложить как прямоугольник 4×6, так и прямоугольник 3×8. Прав ли он?

Ответ: Прав. Пример показан на рисунке.

5. Петя хочет закрасить несколько клеток квадрата 6×6 так, чтобы нашлось как можно больше вершин, которые принадлежат ровно трём закрашенным квадратам? Какого наибольшего числа таких вершин он может добиться?

Ответ: 25.



Решение. Каждая вершина сетки принадлежит одному, двум или четырем квадратам, причём последних 25. Значит, искомых вершин не более 25. Пример показан на рисунке.

Критерии. Пример : 4 балла. Оценка: 3 балла.

Общие рекомендации по проверке

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

8 класс

1. В пяти пакетах лежат конфеты. В первом 2, во втором 12, в третьем 12, в четвёртом 12 и в пятом 12. Из любого пакета в любой другой можно переложить любое возможное число конфет. За какое наименьшее число перекладываний можно добиться равного числа конфет во всех пакетах?

Ответ: за 4.

Всего конфет 50 и должно стать по 10. В четырёх пакетах по 12, что больше 10, и эти пакеты участвуют в перекладываниях на уменьшение до 10. Значит, перекладываний не менее 4.

Из пакетов со второго по пятый - по две конфеты в первый.

Критерии. За пример перекладываний 2 балла. За оценку 5 баллов.

2. Можно ли вместо звёздочек поставить шесть последовательных натуральных чисел, чтобы равенство *×*×*+*×*×*=2015 стало верным?

Ответ: Нельзя.

Сумма нечётна, значит, одно слагаемое чётно, другое нечётно. Из шести последовательных чисел - три чётных и три нечётных. Нечётное слагаемое состоит из произведения трёх нечётных чисел, чётное - из произведения трёх чётных. Оба слагаемых будут делиться на 3, так как одно нечётное и одно чётное число из шести последовательных кратны 3. Но сумма на 3 не делится.

3. Имеется семь красных кубиков, три синих и девять зелёных. В мешок для подарка уложили десять кубиков. Сколькими различными способами это могли сделать?

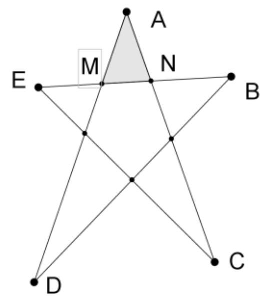
Ответ: 31.

Положим в мешок красные кубики (8 способов от 0 до 7), теперь кладём синие кубики (4 способа от 0 до 3). Добавляем нужное число зелёных (1 способ). Всего $8\times4=32$.

Одна операция невозможна: 10 зеленых. Поэтому способов на 1 меньше.

4. Имеется пятиконечная звезда. У неё есть три равных угла при вершинах и два оставшихся тоже равны между собой. Верно ли, что из пяти треугольников при вершинах звезды хотя бы один равнобедренный?

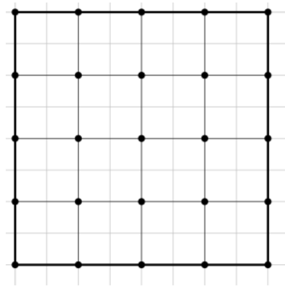
Ответ: Верно.



Решение. Можно обозначения всегда ввести так, чтобы были равны углы при вершинах B и E, C и D. Так как внешний угол треугольника равен сумме двух, не смежных с ним, то верны равенства:

$\angle NMA=\angle B+\angle D$, $\angle MNA=\angle E+\angle C$,

Значит, эти углы равны как суммы равных углов, и треугольник MNA равнобедренный.

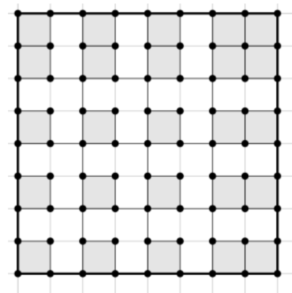


Важно понимать, что принципиальных случаев равенства углов два.

Критерии. Рассмотрен только один случай: 4 балла.

5. Петя хочет закрасить несколько клеток квадрата 8×8 так, чтобы для любой вершины нашелся закрашенный квадрат, которому она принадлежит. Какое наименьшее число квадратов он должен закрасить?

Ответ:25.



Отметим 25 вершин квадрата 8×8 (см. рис. справа). При каждой отмеченной вершине должен быть закрашенный квадрат. Каждый квадрат задевает только одну такую вершину. Значит их не менее 25. Пример показан на рисунке внизу, и указанные 25 закрашенных квадратов задевают все вершины сетки.

Критерии. Пример : 4 балла. Оценка: 3 балла.