ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2015/2016 учебный год

Муниципальный этап

11 класс

1. Является ли число $\underbrace{444...4}_{2n\ \text{цифр}} - \underbrace{88...8}_{n\ \text{цифр}}$ полным квадратом для любого натурального n?

Составитель Валеев Н.Ф.

2. Решите уравнение: $\cos^4\left(\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}-|x|}\right)+\sin^4\left(\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}-|x|}\right)=\sin^{-2}\left(\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}-|x|}\right).$

Составитель ИсаевК.П.

3. Известно, что на шахматной доске можно расставить 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Школьнику Пете не нравится шахматная раскраска доски, и он раскрасил доску в 32 цвета, так что клеток каждого цвета ровно две. Сможет ли он теперь расставить 8 ладей так, чтобы они не били друг друга и стояли на клетках разного цвета?

Составитель Валеев Н.Ф.

4. Найдите все тройки натуральных чисел x, y и z таких, что $(x+1)(y+1)(z+1)=3xyz$

Составитель Валеев Н.Ф.

5. Дана треугольная призма с равносторонним основанием m. Боковые ребра равны стороне основания. Одна из вершин удалена от вершин основания на одинаковые расстояния. Найти наибольший радиус сферы поместившейся внутри призмы.

Составитель Луценко В.И.

Общие рекомендации по проверке

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ряд ошибок, либо не рассмотрение отдельных случаев, но может стать правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев, или в задаче типа «оценка + пример» верно получена оценка.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи, или в задаче типа «оценка + пример» верно построен пример.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Решения

1. Является ли число $\underbrace{444\ldots4}_{2n\text{ цифр}}-\underbrace{88\ldots8}_{n\text{ цифр}}$ полным квадратом для любого натурального n?

Решение. Число $K=\underbrace{444\ldots4}_{2n\text{ цифр}}-\underbrace{88\ldots8}_{n\text{ цифр}}$ является полным квадратом. Действительно.

$$\underbrace{444\ldots4}_{2n\text{ цифр}}=4\left(10^{2n}+10^{2n-1}+\ldots+10+1\right)=4\frac{10^{2n}-1}{10-1}=4\frac{10^{2n}-1}{9}$$

$$\underbrace{88\ldots8}_{n\text{ цифр}}=8\left(10^{n}+10^{n-1}+\ldots+1\right)=8\frac{10^{n}-1}{9}$$

$$\underbrace{444\ldots4}_{2n\text{ цифр}}-\underbrace{88\ldots8}_{n\text{ цифр}}=\frac{4}{9}\left(10^{2n}-2\cdot10^{n}+1\right)=2^2\left(\frac{10^{n}-1}{3}\right)^2$$

Заметим, что $10^n-1\;\vdots\;3$. Значит число K полный квадрат.

2. Решите уравнение: $\cos^4\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-|x|}\right)+\sin^4\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-|x|}\right)=\sin^{-2}\left(\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-|x|}\right)$.

Решение.

Сделаем замену $t=\left(\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}-|x|}\right)$. Очевидно $0<t\le\dfrac{\pi}{2}$.

$\cos^4 t+\sin^4 t=\sin^{-2} t.$

$\cos^4 t+\sin^4 t=(\cos^2 t+\sin^2 t)^2-2\sin^2 t\cdot\cos^2 t=1-2\sin^2 t\cdot\cos^2 t\le 1.$ $\dfrac{1}{\sin^2 t}\ge 1$.

Равенство возможно, только если $\cos^4 t+\sin^4 t=1$ и $\sin^{-2} t=1$ одновременно. Это возможно только при $\sin^2 t=1$.

Учитывая, что $0<t\le\dfrac{\pi}{2}$, $t=\dfrac{\pi}{2}$. Тогда $x=0$.

Ответ: 0

Рекомендации по проверке.

Приведен ответ $x=0$, но не доказано, что других корней нет – 0 баллов.

3. Известно, что на шахматной доске можно расставить 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Школьнику Пете не нравится шахматная раскраска доски, и он раскрасил доску в 32 цвета, так что клеток каждого цвета ровно две. Сможет ли он теперь расставить 8 ладей так, чтобы они не били друг друга и стояли на клетках разного цвета?

Ответ: Да

Решение.

Заметим, что общее число способов расставить 8 ладей на доске так, чтобы они не били друг друга равно $8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1=8!$ (на первой вертикали 8 способами, на второй 7 и т.д.)

Теперь подсчитаем количество способов расстановки 8 ладей так, чтобы какие-то две ладьи стояли на клетках одного цвета: пару ладей стоящих на клетках одного цвета можно расставить не более чем 32 способами (их может быть меньше, так как если клетки одного цвета стоят на одной горизонтали или вертикали, то мы ладьи поставить туда не можем). Остальные 6 ладей можно расставить 6! способами. Значит общее число способов расстановки в этом случае $k\le 32\cdot 6!$

Предположим, что ему не удастся это сделать. Это означает, что $k\ge 8!$, но тогда $32\cdot6!\ge 8!\Leftrightarrow 32\ge 8\cdot 7$. Получаем противоречие.

Рекомендации по проверке.

Найдено только количество способов расстановки 8 ладей на шахматной доске, чтобы они не били друг друга: 2 балла

Найдена оценка на количество расстановок 8 ладей так, чтобы какие-то две ладьи стояли на клетках одного цвета: 4 балла

Задача в целом решена, но не учитывается, что если клетки одного цвета стоят на одной горизонтали или вертикали, то мы ладьи поставить туда не можем: не более 6 баллов.

4. Найдите все тройки натуральных чисел x, y и z таких, что $(x+1)(y+1)(z+1)=3xyz$

Решение. Поскольку левая часть уравнения делится на 3, то , не ограничивая общности, положим x=3k-1, где $k\in N$, и получим следующую оценку:

$3k(y+1)(z+1)=3(3k-1)yz\ge 3(3k-k)yz$ или $(y+1)(z+1)\ge 2yz$. Далее имеем

$yz + y + z + 1 \geq 2yz \iff y + z + 1 \geq yz \iff 2 \geq (y-1)(z-1)$. Последнее неравенство выполняется независимо от x=3k-1 и симметрично относительно переменных y и z.

Относительно переменной y рассмотрим 2 случая.

1) Пусть y-1>0 , тогда из $2 \geq (y-1)(z-1)$ вытекает, что либо z=3 и y=2 (z=2 и y=3) , либо z=y=2 . Если z=3 и y=2 (z=2 и y=3) тогда x=2. Учитывая симметричность исходного уравнения относительно перестановки переменных, получим $(x, y, z) \in \{(2,2,3),(2,3,2),(3,2,2)\}$

2)Пусть теперь y=1, тогда из уравнения $3k(y+1)(z+1) = 3(3k-1)yz$ получим

$2k(z+1) = (3k-1)z$ или $z = \dfrac{2k}{k-1} = 2 + \dfrac{2}{k-1}$. Последнее уравнение в натуральных числах имеет следующие решения k=2, z=4 и k= 3 , z=3.

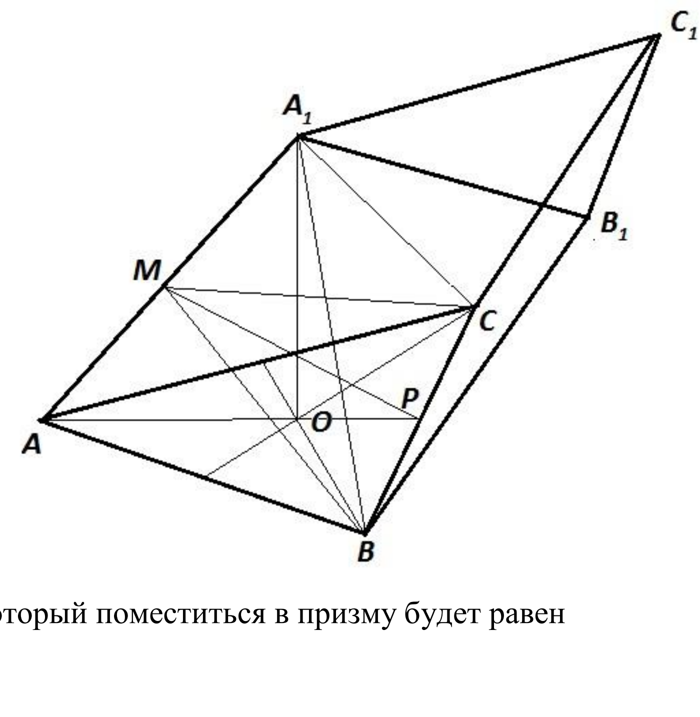
$(x, y, z) \in \{(5,1,4),(5,4,1),(4,1,5),(4,5,1),(1,4,5),(1,5,4),(8,1,3),(8,3,1),(3,1,8),(3,8,1),(1,3,8),(1,8,3)\}$

Ответ: $(x, y, z) \in \{(2,2,3),(2,3,2),(3,2,2),(5,1,4),(5,4,1),(4,1,5),(4,5,1),(1,4,5),(1,5,4)(8,1,3),(8,3,1),(3,1,8),(3,8,1),(1,3,8),(1,8,3)\}$

5. Дана треугольная призма с равносторонним основанием m. Боковые ребра равны стороне основания. Одна из вершин удалена от вершин основания на одинаковые расстояния. Найти наибольший радиус сферы поместившейся внутри призмы.

Решение.

Пусть вершина A_1 равноудалена от вершин треугольника A, B, C. Тогда A_1ABC – тетраэдр у которого высота равна $A_1O = \sqrt{2/3}m$, А апофема $BM = MC = \sqrt{3}/2m$. Найдем радиус шара касающегося трех плоскостей: ABB_1, ACC_1, BCB_1 Если провести сечение через центр такого шара перпендикулярного вышеуказанным плоскостям, то в сечении будет вписанная окружность равнобедренного треугольника. Без потери общности за такой треугольник можно взять BMC ($BMC \perp AA_1$) со сторонами $BM = MC = \sqrt{3}/2m$ и $BC = m$. Найдем радиус вписанной сферы, т.е. радиус вписанной окружности.



$$S_{CMB} = p_{CMB} \cdot r = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot MP.$$

$$r = (\sqrt{3} - 1)/(2 \cdot \sqrt{2})m.$$

Расстояние межу плоскостями оснований призмы $A_1O > 2r$. Действительно,

$\sqrt{2/3}m > (\sqrt{3} - 1)/(2 \cdot \sqrt{2})m \iff$
$2/3 > 2(4 - 2\sqrt{3})/4 \iff 27 > 16.$

Поэтому наибольший радиус шара который поместиться в призму будет равен

$$r = \frac{\sqrt{3} - 1}{(2 \cdot \sqrt{2})m} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4m}$$